# การเรียงสับเปลี่ยน การจัดหมู่ และ ความน่าจะเป็น

การเรียงสับเปลี่ยน การจัดหมู่ และความน่าจะเป็น ถือเป็นหัวข้อที่ค่อนข้างใหญ่และยากในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ข้อสอบค่อนข้างกว้าง หลากหลาย และบางครั้งโจทย์ค่อนข้างคลุมเครือ สำหรับในข้อสอบ PAT1 เรื่องนี้จะออกประมาณ 2 - 5 ข้อ ซึ่งไม่ยากเกินไป เป็นเรื่องที่น่าจะเก็บคะแนนได้ในข้อสอบ PAT1 เลยครับ

**การเรียงสับเปลี่ยน การจัดหมู่ และ ความน่าจะเป็น**

- 1. กฎเกณฑ์เบื้องต้นเกี่ยวกับการนับ
- 2. แฟกทอเรียล
- 3. การเรียงสับเปลี่ยน
- 4. การจัดหมู่
- 5. ทฤษฎีบททวินาม
- 6. ความน่าจะเป็น

# 1. กฎเกณฑ์เบื้องต้นเกี่ยวกับการนับ

การเรียงสับเปลี่ยน การจัดหมู่ และความน่าจะเป็น เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาคอมบินาทอริกซ์ (Combinatorics) ซึ่งศึกษาเกี่ยวกับจำนวนวิธีในการจัดเรียงวัตถุ โดยคอมบินาทอริกซ์นี้ จัดเป็นสาขาที่สำคัญสาขาหนึ่งของภินทนคณิตศาสตร์ (discrete mathematics : คณิตศาสตร์ไม่ต่อเนื่อง)
คอมบินาทอริกซ์ได้เริ่มถือกำเนิดจากปัญหาเกี่ยวกับการพนัน ซึ่งต่อมาได้พัฒนาขึ้นมาเรื่อยๆจนเป็นสาขาหนึ่งของคณิตศาสตร์ที่มีประโยชน์อย่างมากในปัจจุบัน เราสามารถนำคอมบินาทอริกซ์มาประยุกต์ใช้ในการจัดเรียงวัตถุ การจำลองปัญหาต่างๆ การหาความซับซ้อนของกระบวนการต่างๆ การคาดการณ์เหตุการณ์ล่วงหน้าจากข้อมูลทางสถิติ รวมไปถึงการสร้างเกมส์

## 1.1 แผนภาพต้นไม้

ในการหาจำนวนวิธีการทำงานต่างๆนั้น วิธีซึ่งเป็นพื้นฐานที่สุดนั้นคือการเขียนแจกแจงจำนวนวิธีออกมาโดยตรง ซึ่งวิธีที่สะดวกที่สุดในการเขียนแจกแจงกรณีเรามักจะใช้ แผนภาพต้นไม้ (Tree Diagram)

---

**ตัวอย่าง** นายเคน มีเสื้อ 2 ตัว กางเกง 4 ตัว นายเคนจะมีวิธีการแต่งตัวไปเที่ยวกี่วิธี

**ตัวอย่าง** ในการแข่งขันเป่ายิ้งฉุบระหว่างนาย A กับ นาย B โดยมีกติกาว่า ถ้าใครชนะ 2 ครั้งติดกัน หรือชนะรวมกัน 4 ครั้งก่อน จะเป็นผู้ชนะ อยากทราบว่าจะมีวิธีเล่นเกมกี่วิธี

**ตัวอย่าง** จุดจุดหนึ่งเคลื่อนที่อยู่บนเส้นจำนวนในแนวนอน โดยมีจุดเริ่มต้นอยู่ที่จุด 0 และจุดนี้สามารถเคลื่อนที่ไปได้ครั้งละ 1 หน่วย โดยเคลื่อนไปทางซ้ายหรือขวาก็ได้ ถ้าจุดนี้หยุดเคลื่อนที่เมื่อเคลื่อนที่ไปได้ 5 ครั้ง หรือหยุดอยู่ที่ตำแหน่ง +3 หรือตำแหน่ง -2 จุดนี้จะมีวิธีเคลื่อนที่ได้กี่วิธี

## 1.2 หลักการนับ

สำหรับการทำงานบางอย่างที่มีจำนวนวิธีการทำงานมาก การแจกแจงวิธีด้วยแผนภาพต้นไม้คงจะไม่สะดวกนัก โดยทั่วไป เราจะใช้หลักการนับในการคำนวณหาจำนวนวิธี ซึ่งมีกฎที่สำคัญอยู่ 2 ข้อ

- *กฎการบวก* กล่าวว่า ถ้าการทำงานหนึ่งมีวิธีการทำ $k$ วิธี คือ $T_1, T_2, T_3, \ldots, T_k$ โดยที่งานแต่ละอย่างสามารถทำได้ $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k$ วิธี ตามลำดับ และวิธีการทำงานแต่ละวิธีแตกต่างกัน แล้วจำนวนวิธีการทำงานนี้เท่ากับ $n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_k = \sum_{i=1}^{k} n_i$ วิธี

- *กฎการคูณ* กล่าวว่า ถ้าการทำงานอย่างหนึ่งประกอบด้วยการทำงาน $k$ ขั้นตอน โดยถ้างานขั้นที่ 1 มีวิธีการทำ $n_1$ วิธี และในแต่ละวิธีที่เลือกทำงานขั้นตอนแรก มีวิธีทำงานขั้นตอนที่สองได้ $n_2$ วิธี และในแต่ละวิธีที่เลือกทำงานขั้นตอนแรกและอย่างขั้นตอนที่สอง มีวิธีที่จะทำงานขั้นตอนที่สามได้ $n_3$ วิธี เช่นนี้ไปเรื่อยๆ แล้วจำนวนวิธีทำงานนี้เท่ากับ $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_k$ วิธี

---

**ตัวอย่าง** นางสาวอั้มมีเสื้อ 10 แบบ มีกระโปรง 8 แบบ และมีรองเท้า 5 คู่ นางสาวอั้มจะมีวิธีการแต่งตัวกี่วิธี

**ตัวอย่าง** โยนลูกเต๋า 3 ลูก พร้อมกับโยนเหรียญ 5 เหรียญพร้อมกัน จะมีวิธีการออกแต้มของลูกเต๋าและการออกหน้าของเหรียญกี่วิธี

**ตัวอย่าง** นายโดมเดินทางจากเมือง A ไปยังเมือง C โดยผ่านเมือง B ถ้าถนนจากเมือง A ไปเมือง B มี 3 เส้นทาง และถนนจากเมือง B ไปเมือง C มี 4 เส้นทาง จงหาจำนวนวิธีการเดินทาง เมื่อ

(1) เดินทางไปและกลับโดยใช้เส้นทางอย่างไรก็ได้

(2) เดินทางไปและกลับคนละวิธี

(3) ขากลับห้ามใช้ถนนเส้นเดียวกับขาไป

**ตัวอย่าง** ในการแจกขนม 3 ชิ้นให้แก่เด็ก 6 คน จะแจกได้กี่วิธี เมื่อ

(1) แจกอย่างไรก็ได้

(2) ไม่แจกซ้ำคน

(3) มีการแจกซ้ำคน

**ตัวอย่าง** โยนลูกเต๋า 1 ลูก 2 ครั้ง จงหาจำนวนวิธีที่ลูกเต๋าจะขึ้นหน้าตามเงื่อนไขต่อไปนี้

(1) ไม่มีเงื่อนไขเพิ่มเติม

(2) ผลรวมแต้มเป็นเลขคู่

(3) ผลคูณแต้มเป็นเลขคี่

**ตัวอย่าง** คน 3 คน ต้องการขึ้นลิฟท์ซึ่งมีอยู่ 5 ตัว จะมีจำนวนวิธีขึ้นลิฟท์กี่วิธี เมื่อ

(1) ไม่มีเงื่อนไขเพิ่มเติม

(2) แต่ละคนขึ้นลิฟท์ไม่ซ้ำกัน

(3) มีอย่างน้อย 2 คน ขึ้นลิฟท์ตัวเดียวกัน

(4) ไม่ขึ้นลิฟท์ตัวเดียวกันทั้งสามคน

**ตัวอย่าง** ข้อสอบชุดหนึ่งเป็นข้อสอบแบบกาถูก-ผิด จำนวน 10 ข้อ จะมีวิธีการทำกี่วิธี เมื่อ

(1) ไม่มีเงื่อนไขเพิ่มเติม

(2) ต้องตอบทุกข้อ

(3) กาถูก 1 ข้อ กาผิด 9 ข้อ

(4) ต้องตอบทุกข้อ และ กาถูกและผิดอย่างน้อย 1 ข้อ

**ตัวอย่าง** ในการสร้างจำนวนสามหลักจากตัวเลข 0, 1 ,2 ,5 ,6, 7 จะมีวิธีการสร้างกี่วิธี เมื่อ

(1) ใช้เลขซ้ำได้

(2) เป็นเลขคู่และห้ามใช้เลขซ้ำ

(3) เป็นเลขคี่ที่มีค่าอยู่ระหว่าง 200 - 600 และห้ามใช้เลขซ้ำ

**ตัวอย่าง** ในการสร้างคำที่ประกอบด้วยตัวอักษร 3 ตัวโดยไม่คำนึงถึงความหมายโดยใช้ตัวอักษรจากคำว่า AMOUNT และไม่ใช้ตัวอักษรซ้ำ จะสามารถสร้างได้กี่คำ เมื่อ

(1) ไม่มีเงื่อนไขเพิ่มเติม

(2) มีสระอย่างน้อย 1 ตัว

(3) ขึ้นต้นด้วยสระและลงท้ายด้วยพยัญชนะ

**ตัวอย่าง** ในงานเลี้ยงแห่งหนึ่งมีอาหาร 5 ชนิด เป็นแกง 3 ชนิด และมีเครื่องดื่ม 3 ชนิด เป็นเครื่องดื่มแอลกอฮอล์ 2 ชนิด ถ้าทุกคนที่ไปร่วมงานต้องรับประทานอาหารคาวและเครื่องดื่มอย่างละ 1 ชนิด แขกจะมีวิธีรับประทานอาหารกี่วิธี เมื่อ

(1) ไม่มีเงื่อนไขเพิ่มเติม

(2) ถ้าเลือกดื่มเครื่องดื่มแอลกอฮอล์แล้ว จะต้องเลือกทานแกงเผ็ด

**ตัวอย่าง** ในการเลือกหัวหน้าห้องและรองหัวหน้าห้องอย่างละ 1 คน (เด็ก 1 คน เป็นได้แค่ตำแหน่งเดียวเท่านั้น) จากนักเรียนชั้น ป. 1/1 ซึ่งมีเด็กนักเรียนชาย 4 คน นักเรียนหญิง 6 คน จะมีวิธีเลือกกี่วิธี เมื่อ

(1) ไม่มีเงื่อนไขเพิ่มเติม

(2) ให้หัวหน้าห้องเป็นผู้ชาย

(3) มีผู้หญิงได้รับตำแหน่งอย่างน้อย 1 คน

## 2. แฟกทอเรียล

แฟกทอเรียล ( Factorial) เป็นตัวดำเนินการที่สำคัญมากในการศึกษาคอมบินาทอริกซ์ โดยแฟกทอเรียลมีนิยามดังนี้

บทนิยาม ถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวก แฟกทอเรียล n คือ ผลคูณของจำนวนเต็มบวกตั้งแต่ 1 ถึง n และเขียนแทนด้วย n! นั่นคือ

$$n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot \ldots \cdot (n-1)\cdot n$$

| ข้อควรรู้ |
|---|
| |

**ตัวอย่าง** จงหาค่าของแฟกทอเรียลต่อไปนี้

(1) $5!$ ________________ (2) $3! + 8!$ ________________

(3) $\frac{7!}{4!}$ ________________ (4) $\frac{6!}{4!\cdot 2!}$ ________________

**ตัวอย่าง** จงเขียนแฟกทอเรียลต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

(1) $\frac{n!}{(n-2)!}$ ________________________

(2) $\frac{(n+1)!\cdot (n-3)!}{(n-2)!\cdot n!}$ ________________________

**ตัวอย่าง** จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ในรูปแฟกทอเรียล

(1) $7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1$ ________________________

(2) $6\cdot 7\cdot 8$ ________________________

(3) $(n + 3)\cdot (n + 2)\cdot \ldots \cdot n$ ________________________

(4) $(n^2 - 1)\cdot (n^2 - 4)\cdot (n^2 - 9)\cdot n$ ________________________

(5) $(3n^2 + 5)\cdot (3n^2 + 4)\cdot (3n^2 + 3)$ ________________________

**ตัวอย่าง** จงหาค่า n จากสมการต่อไปนี้ (กำหนดให้ n $\in \mathbb{N} \cup \{0\}$)

(1) $n! = 720$

(2) $\dfrac{(n+2)!}{(n-1)!} = 120$

(3) $\dfrac{n!}{(n-3)!} = \dfrac{(n-1)!}{(n-5)!}$

(4) $(n+1)! - 8 \cdot (n-2)! \cdot (n-1)! = n!$

**ตัวอย่าง** 149! มีเลข 0 ลงท้ายกี่ตัว

# 3. การเรียงสับเปลี่ยน

ในหัวข้อนี้ เราจะศึกษาการเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของ (Permutation) ที่มีจำนวนจำกัด โดยคำนึงถึงตำแหน่งการเรียงของสิ่งของ ซึ่งเรามักจะสนใจจำนวนวิธีการเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของ (จำนวนวิธีซึ่งได้ตำแหน่งการเรียงสิ่งของที่แตกต่างกัน) โดยการหาจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของจะใช้หลักการนับเป็นพื้นฐานในการคำนวณ

## 3.1 การเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นของสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด

สำหรับสิ่งของ n ชิ้นซึ่งแตกต่างกันทั้งหมด ถ้าต้องการนำของเหล่านี้จำนวน r ชิ้น $(1 \le r \le n)$ มาเรียงสับเปลี่ยนในแนวเส้นตรง จะมีจำนวนวิธีการจัดเรียงทั้งหมดเท่ากับ $P_{n,r} = \dfrac{n!}{(n-r)!}$ วิธี

---

**ตัวอย่าง** มีคน 8 คน จะมีวิธีการจัดคนเข้าแถวกี่วิธี เมื่อ

( 1) นำคนมาจัดแถวเพียง 5 คน

(2) ใช้คนทั้ง 8 คนในการจัดแถว

(3) จัดคนทั้งหมดเป็นสองแถว แถวละ 4 คน

| | |
|---|---|
| **ข้อควรรู้** | จำนวนวิธีในการเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นของสิ่งของ n สิ่งที่แตกต่างกันทั้งหมดเท่ากับ n! วิธี |

## 3.2 การเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นของสิ่งของที่ไม่แตกต่างกันทั้งหมด

สำหรับสิ่งของ n ชิ้น ในสิ่งของเหล่านี้มีจำนวน $n_1$ ชิ้นที่เหมือนกันเป็นกลุ่มที่ 1 มี $n_2$ ชิ้นที่เหมือนกันเป็นกลุ่มที่ 2 เป็นเช่นนี้ไปเรื่อยๆจนถึงกลุ่มที่ k โดยที่ $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ แล้ว จำนวนวิธีทั้งหมดในการเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นของสิ่งของ n ชิ้นเหล่านี้ เท่ากับ $\dfrac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}$ วิธี

**ตัวอย่าง** ในนำตัวอักษรจากคำว่า CLIPVIDVA มาจัดเรียงเป็นคำต่างๆ โดยไม่สนใจความหมายจะสามารถจัดได้ทั้งหมดกี่วิธี เมื่อ

(1) ใช้ตัวอักษรทุกตัวในการจัดเรียง

(2) นำตัวอักษรมาจัดเรียงเพียง 3 ตัว

---

## 3.3 การเรียงสับเปลี่ยนเชิงวงกลม

สำหรับสิ่งของ n ชิ้นซึ่งแตกต่างกันทั้งหมด จำนวนวิธีในการนำของ n ชิ้นเหล่านี้มาเรียงสับเปลี่ยนเชิงวงกลม เท่ากับ (n - 1)! วิธี

---

**ตัวอย่าง** ในการจัดคน 7 คน นั่งรอบโต๊ะกลมเพื่อรับประทานอาหาร จะจัดได้ทั้งหมดกี่วิธี

**ข้อควรรู้** จำนวนวิธีในการเรียงสับเปลี่ยนเชิงวงกลมแบบ 3 มิติ(สามารถมองได้สองด้าน)ของสิ่งของ n ชิ้นที่แตกต่างกันทั้งหมดเท่ากับ $\frac{(n-1)!}{2}$ วิธี

**ตัวอย่าง** มีลูกปัด 10 สี ถ้าต้องการร้อยลูกปัดเพื่อทำสร้อยข้อมือ จะสามารถทำได้กี่วิธี

**ข้อควรรู้** จำนวนวิธีในการเรียงสับเปลี่ยนเชิงวงกลมของสิ่งของ n ชิ้นที่*ไม่*แตกต่างกันทั้งหมดเท่ากับ $\frac{(n-1)!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_r!}$ วิธี โดยที่ ห.ร.ม. ของ $n_1, n_2, \ldots, n_r$ มีค่าเท่ากับ 1 เท่านั้น

**ตัวอย่าง** มีน้ำส้มที่เหมือนกัน 3 แก้ว น้ำเขียวที่เหมือนกัน 4 แก้ว และน้ำแดงที่เหมือนกัน 5 แก้ว ถ้าต้องการจัดเรียงแก้วน้ำทั้งหมดบนโต๊ะกลม จะสามารถจัดได้กี่วิธี

**ตัวอย่าง** ในการนำตัวอักษรจากคำว่า COCO มาจัดเรียงเป็นวงกลม จะสามารถจัดได้กี่วิธี

**ตัวอย่าง** ในการสัมภาษณ์งานครั้งหนึ่งซึ่งมีตำแหน่งงานที่แตกต่างกันว่างอยู่ 8 ตำแหน่ง เป็นวิศวกรไฟฟ้า 3 ตำแหน่ง วิศวกรคอมพิวเตอร์ 3 ตำแหน่ง และวิศวกรอุตสาหการอีก 2 ตำแหน่ง มีผู้มาสมัครงานเป็นวิศวกรไฟฟ้า 5 คน วิศวกรคอมพิวเตอร์ 6 คน และวิศวกรอุตสาหการอีก 3 คน จะมีวิธีบรรจุคนเข้าทำงานกี่วิธี

**ตัวอย่าง** มีหนังสือเลข 2 เล่ม เคมี 3 เล่ม และฟิสิกส์ 4 เล่ม จะมีวิธีการจัดเรียงหนังสือกี่วิธี เมื่อ

(1) จัดอย่างไรก็ได้

(2) หนังสือฟิสิกส์อยู่ติดกันเสมอ

(3) วิชาเดียวกันอยู่ติดกัน

(4) หนังสือเลขอยู่ติดกัน

(5) หนังสือเคมีไม่อยู่ติดกัน

(6) หนังสือเลขอยู่ริม 2 ข้าง

(7) หนังสือเลขติดกัน แต่หนังสือเคมีอยู่ติดกันทั้ง 4 เล่มไม่ได้

**ตัวอย่าง** ชาย 6 คน และ หญิง 6 คน ต่อคิวเข้าซื้ออาหาร จะมีวิธีต่อคิวกี่วิธี เมื่อ

(1) เพศเดียวกันยืนติดกัน

(2) หญิงทุกคนยืนติดกัน

(3) ชาย-หญิง ยืนสลับกันทีละ 1 คน

(4) ชาย-หญิง ยืนสลับกันทีละ 2 คน

(5) ชาย-หญิง ยืนสลับกันทีละ 3 คน

(6) หญิงยืนเป็นหัวแถวและชายยืนเป็นท้ายแถว

**ตัวอย่าง** คน 7 คน มีนาย ก, ข และ ค รวมอยู่ด้วย จงหาจำนวนวิธีในการจัดเรียงคนทั้งเจ็ด เมื่อ

(1) นาย ก, ข และ ค อยู่แยกกัน

(2) นาย ก อยู่ติดกับ ข แต่นาย ค ไม่ติดกับ ก และ ข

(3) นาย ก อยู่ติดกับ ข แต่ไม่ติดกับ ค

(4) นาย ข อยู่ติดกับ ก และ ค

(5) นาย ก, ข และ ค ห้ามอยู่ติดกัน 3 คน

**ตัวอย่าง** ในการเข้าแถวเคารพธงชาติของนักเรียนโรงเรียนอนุบาลหมีน้อยฮอกไกโด ซึ่งมีนักเรียนชาย 8 คน หญิง 10 คน จะมีวิธีการจัดนักเรียนเข้าแถวกี่วิธี เมื่อ

(1) จัดเป็นแถวหน้ากระดาน 2 แถว ชาย 1 แถว หญิง 1 แถว

(2) จัดเป็นแถวหน้ากระดาน 1 แถว โดยเพศเดียวกันยืนติดกัน

(3) จัดเป็นแถวหน้ากระดาน 1 แถว โดยเพศชายเรียงจากสูงไปเตี้ย

(4) จัดเป็นแถวหน้ากระดาน 2 แถว แถวละเพศและเรียงลำดับความสูง

**ตัวอย่าง** ในการสร้างเลข 5 หลักจากตัวเลข 2, 3, 4, 5, 6 จะมีวิธีสร้างกี่วิธี เมื่อ

(1) จำนวนที่สร้างเป็นจำนวนคี่

(2) จำนวนที่สร้างมีเลขแต่ละหลักไม่ซ้ำกัน

(3) ไม่ใช้เลขซ้ำ และเลข 4 อยู่ระหว่างเลข 3 และเลข 5 เสมอ

(4) ไม่ใช้เลขซ้ำ และเลข 5 อยู่ข้างหน้า เลข 2 เสมอ

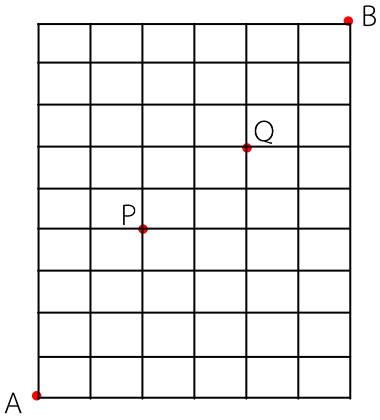
**ตัวอย่าง** ในการนำตัวอักษรจากคำว่า INTEGER มาเรียงสับเปลี่ยนเป็นคำต่างๆโดยไม่คำนึงถึงความหมาย จะมีวิธีการจัดเรียงทั้งหมดกี่วิธี เมื่อ

(1) ไม่มีเงื่อนไขเพิ่มเติม

(2) อักษรที่ไม่ซ้ำกันอยู่ติดกัน

(3) อักษรที่ซ้ำกันอยู่แยกกัน

**ตัวอย่าง** กำหนดให้เส้นต่างๆในรูปแทนถนน ถ้านาย ก ต้องการเดินทาง จากจุด A ไปยังจุด B โดยการเดินทางแต่ละครั้งต้องไปทางทิศตะวันออกหรือทิศเหนือเท่านั้น นาย ก จะมีวิธีการเดินทางกี่วิธี เมื่อ




(1) ไม่มีเงื่อนไขเพิ่มเติม

(2) ผ่านจุด P

(4) ผ่านจุด P แต่ไม่ผ่านจุด Q

**ตัวอย่าง** ต้องการจัดชาย 6 คน หญิง 2 คน นั่งรอบโต๊ะกลม จะมีวิธีการจัดกี่วิธี เมื่อ

(1) ไม่มีเงื่อนไขเพิ่มเติม

(2) หญิงนั่งติดกัน

(3) หญิงนั่งแยกกัน

(4) หญิงนั่งตรงข้ามกัน

**ตัวอย่าง** คน 7 คน มีนาย ก, ข และ ค รวมอยู่ด้วย จงหาจำนวนวิธีจัดเรียงคนนั่งรอบโต๊ะกลม เมื่อ

(1) นาย ก, ข และ ค อยู่แยกกัน

(2) นาย ก อยู่ติดกับ ข แต่นาย ค ไม่ติดกับ ก และ ข

(3) นาย ก อยู่ติดกับ ข แต่ไม่ติดกับ ค

(4) นาย ข อยู่ติดกับ ก และ ค

(5) นาย ก, ข และ ค ห้ามอยู่ติดกัน 3 คน

**ตัวอย่าง** สามี-ภรรยา 5 คู่ นั่งรอบโต๊ะกลม จะมีวิธีการจัดกี่วิธี เมื่อ

(1) สามี-ภรรยา นั่งติดกัน

(2) สามี-ภรรยาทุกคู่ นั่งตรงข้ามกัน

**ตัวอย่าง** ชาย 6 คน หญิง 6 คน นั่งรอบโต๊ะกลม จะมีวิธีการจัดกี่วิธี เมื่อ

(1) สลับชาย-หญิง ทีละ 1 คน

(2) สลับชาย-หญิง ทีละ 2 คน

(3) สลับชาย-หญิง ทีละ 3 คน

**ตัวอย่าง** ในการเสิร์ฟอาหารให้แก่ลูกค้าที่เข้ามานั่งรับประทานอาหารในร้าน 5 คน คนละ 1 จานรอบโต๊ะกลม จะมีวิธีการเสิร์ฟกี่วิธี

**ตัวอย่าง** ในการร้อยพวงมาลัยเป็นวงกลมพวงหนึ่ง มีดอกไม้ทั้งหมด 14 ดอก เป็นดอกมะลิที่แตกต่างกัน 4 ดอก ดอกดาวเรืองที่แตกต่างกัน 2 ดอก จะมีวิธีการร้อยพวงมาลัยกี่วิธี เมื่อ

(1) ไม่มีเงื่อนไขเพิ่มเติม

(2) ดอกมะลิอยู่ติดกัน และดอกดาวเรืองอยู่ติดกัน

(3) ดอกมะลิถูกล้อมด้วยดอกดาวเรือง

**ข้อควรรู้** สรุปเงื่อนไขในการเรียงสับเปลี่ยน

# 4. การจัดหมู่

การจัดหมู่ (Combination) คือ การเลือกสิ่งของจำนวนหนึ่งขึ้นมาจากสิ่งของที่มีทั้งหมด โดยไม่สนใจลำดับการจัดเรียงของสิ่งของที่เลือก

## 4.1 การจัดหมู่ของสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด

สำหรับสิ่งของ n ชิ้นซึ่งแตกต่างกันทั้งหมด ถ้าต้องการจัดหมู่ของเหล่านี้จำนวน r ชิ้น ($1 \leq r \leq n$) จะมีจำนวนวิธีการจัดหมู่ทั้งหมดเท่ากับ $C_{n,r} = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$

<u>การเลือกทั่วไป</u>

**ตัวอย่าง** มีหนังสือในห้อง 6 เล่ม ต้องการหยิบมาอ่าน 3 เล่ม จะมีวิธีเลือกหยิบหนังสือกี่วิธี

**ตัวอย่าง** ในงานปัจฉิมนิเทศ นักเรียนทั้ง 50 คนในห้อง 6/1 ต้องการถ่ายรูปคู่ จะต้องถ่ายรูปทั้งหมดกี่ใบจึงจะมีรูปคู่ของทุกคน

**ตัวอย่าง** ในถุงใบหนึ่งมีลูกบอล 12 ลูก เป็นสีแดง 4 ลูก สีเขียว 3 ลูก และสีฟ้า 5 ลูก ถ้าต้องการหยิบลูกแก้วมา 6 ลูก จะมีวิธีหยิบกี่วิธี เมื่อ

(1) ได้สีเขียว 2 ลูก และสีฟ้า 4 ลูก

(2) ได้สีแดง 2 ลูก

(3) ได้สีเขียวอย่างน้อย 1 ลูก

(4) ได้ทุกสีเท่ากัน

(5) ไม่ได้สีเขียวเลย

**ตัวอย่าง** ข้อสอบฉบับหนึ่งมี 2 ตอน ตอนแรกมี 5 ข้อ ตอนที่สองมี 7 ข้อ นักเรียนต้องเลือกทำ 8 ข้อ จะมีวิธีการทำข้อสอบกี่วิธี เมื่อ

(1) ต้องทำตอนแรก 3 ข้อ

(2) ต้องทำตอนแรกอย่างน้อย 2 ข้อ

**ตัวอย่าง** ในการเลือกตั้ง ส.ส. ครั้งหนึ่ง ซึ่งมีผู้แทนได้ 3 คน มีพรรคการเมืองส่งผู้สมัคร 5 พรรค พรรคละ 3 คน จะมีวิธีเลือกผู้แทนทั้ง 3 คนได้กี่วิธี เมื่อ

(1) อยู่พรรคเดียวกันทั้ง 3 คน

(2) อยู่ต่างพรรคกันทั้ง 3 คน

(3) อยู่พรรคเดียวกัน 2 คน

**ตัวอย่าง** ต้องการหยิบไพ่ 5 ใบจากไพ่สำรับหนึ่งซึ่งมี 52 ใบ จะมีวิธีหยิบได้กี่วิธี เมื่อ

(1) หยิบได้ไพ่ต่างชนิดกันทั้งหมด

(2) หยิบได้ไพ่โพดำ 2 ใบ โพแดง 3 ใบ

(3) หยิบได้ไพ่ชนิดเดียวกัน 4 ใบ

(4) หยิบได้ไพ่ชุดเดียวกัน 5 ใบ

(5) หยิบได้คู่สองและตองห้า

(6) หยิบได้คู่สอง ที่เหลือไม่เป็นคู่หรือตอง

**ตัวอย่าง** ในงานเลี้ยงแห่งหนึ่ง มีคู่สามี -ภรรยา รวม 6 คู่ ถ้าต้องการเลือกคนเหล่านี้มา 4 คน เป็นชาย 2 คน และหญิง 2 คน เพื่อจับคู่เต้นรำ จะมีวิธีการเลือกกี่วิธีเมื่อ

(1) ทั้ง 4 คน ไม่มีใครเป็นสามี-ภรรยากัน

(2) ใน 4 คนนี้ มีสามี-ภรรยาอย่างน้อย 1 คู่

<u>การประยุกต์กับเรขาคณิต</u>

**ตัวอย่าง** มีเส้นตรงที่ขนาดกันชุดหนึ่ง 4 เส้น และมีเส้นตรงที่ขนานกันอีกชุดหนึ่งจำนวน 7 เส้น ถ้าให้เส้นตรงทั้งสองชุดนี้ตัดกัน จะเกิดรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานทั้งหมดกี่รูป

**ตัวอย่าง** มีวงกลม 5 วง และเส้นตรง 7 เส้น จงหาว่าวงกลมและเส้นตรงเหล่านี้จะตัดกันมากที่สุดกี่จุด

**ตัวอย่าง** กำหนดตารางขนาด 5x4 ตารางหน่วย ซึ่งแต่ละช่องเป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีขนาดเท่ากัน จงหา

(1) จำนวนสี่เหลี่ยมมุมฉากทั้งหมด

(2) จำนวนสี่เหลี่ยมจัตุรัสทั้งหมด

**ตัวอย่าง** จุด 7 จุด เรียงอยู่บนวงกลมวงหนึ่ง จงหา

(1) จำนวนคอร์ดที่ผ่านจุดเหล่านี้

(2) จำนวนสามเหลี่ยมที่มีจุดเหล่านี้เป็นจุดยอด

(3) จำนวนเส้นทแยงมุมของรูป 7 เหลี่ยมที่มีจุดเหล่านี้เป็นจุดยอด

(4) ถ้าให้ จุด A และ B เป็นจุดจุดหนึ่งใน 7 จุด แล้ว

(4.1) จะมีวิธีสร้างรูปห้าเหลี่ยมที่มีจุด A เป็นจุดยอดจุดหนึ่งได้กี่วิธี

(4.2) จะมีวิธีสร้างรูปสามเหลี่ยมที่ไม่มีจุด A และ B เป็นจุดยอดกี่วิธี

**ตัวอย่าง** มีจุด 10 จุดเรียงตัวอยู่ในระนาบเดียวกัน ใน 10 จุดนี้มี 5 จุดที่อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน จงหา

(1) จำนวนเส้นตรงที่ลากผ่านจุด 10 จุดเหล่านี้

(2) จำนวนสามเหลี่ยมที่มีจุดเหล่านี้เป็นจุดยอด

<u>ผสม - อื่นๆ</u>

**ตัวอย่าง** ในงานร้านอาหารแห่งหนึ่ง มีแขกนั่งรอบโต๊ะกลมอยู่ 5 คน ถ้าต้องการเสิร์ฟน้ำให้แก่แขกทั้ง 5 คน โดยมีเครื่องดื่ม 2 ชนิด เป็นน้ำผลไม้ 4 แก้ว และน้ำอัดลม 5 แก้ว จำนวนวิธีที่จะเลือกน้ำผลไม้ 2 แก้ว และน้ำอัดลม 3 แก้วเพื่อเสิร์ฟแก่แขก 5 คนแบบสุ่ม เท่ากับเท่าใด

**ตัวอย่าง** คนกลุ่มหนึ่งมีจำนวน 8 คน ซึ่งมีนาย ก, ข และ ค รวมอยู่ด้วย ต้องการเลือกคนเหล่านี้มานั่งรอบโต๊ะกลม 6 คน โดยที่นาย ก และนาย ข ต้องถูกเลือกทุกครั้ง และเมื่อจัดรอบโต๊ะกลมแล้ว นาย ก ต้องนั่งติดนาย ข แต่ไม่ติดกับนาย ค จะจัดได้ทั้งหมดกี่วิธี

**ตัวอย่าง** ในการคัดเลือกผู้สมัครเพื่อเข้าศึกษาต่อในระดับอุดมศึกษาครั้งหนึ่ง มีผู้สมัครเป็นชาย 4 คน หญิง 4 คน ผู้สัมภาษณ์ต้องการเลือกผู้สมัครให้เหลือเป็นชาย 3 คน และหญิง 2 คน จากผู้สมัครทุกคนอย่างสุ่ม แล้วจะมีวิธีการจัดลำดับผู้สมัครเข้าสัมภาษณ์กี่วิธี เมื่อ

(1) ผู้สมัครสลับชาย-หญิง

(2) ผู้สมัครหญิงทุกคนติดกัน

---

## 4.2 การแบ่งกลุ่มสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด

สำหรับสิ่งของ n ชิ้นที่แตกต่างกันทั้งหมด ถ้าต้องการเลือกของมา r ชิ้น เพื่อจัดออกเป็น k กลุ่ม(แต่ละกลุ่มมีความแตกต่างกัน) โดยแต่ละกลุ่มมีจำนวน $r_1, r_2, \ldots, r_k$ ชิ้นตามลำดับ ($r_1 + r_2 + \ldots + r_k = r$) และมีของเหลืออยู่ $n - r = R$ ชิ้น จะได้ว่าวิธีการแบ่งกลุ่มของเหล่านี้เท่ากับ

$$\binom{n}{r_1}\cdot\binom{n-r_1}{r_2}\cdot\binom{n-r_1-r_2}{r_3}\cdot\ldots\cdot\binom{n-r_1-r_2-\ldots-r_k}{r_k} = \frac{n!}{r_1!\cdot r_2!\cdot\ldots\cdot r_k!\cdot R!} \text{ วิธี}$$

---

**ตัวอย่าง** มีคน 9 คน แบ่งเข้าห้องนอนสามห้อง ได้แก่ ห้องหมายเลข 1, 2 และ 3

(1) ถ้าต้องการให้ห้องหมายเลข 1 มีคน 2 คน ห้องหมายเลข 2 มีคน 3 คน และห้องหมายเลข 3 มีคน 4 คน จะมีวิธีแบ่งคนเข้าห้องกี่วิธี

(2) ถ้าต้องการให้ห้องหมายเลข 1 มีคน 2 คน ห้องหมายเลข 2 มีคน 2 คน และห้องหมายเลข 3 มีคน 3 คน จะมีวิธีแบ่งคนเข้าห้องกี่วิธี

(3) ถ้าต้องการให้ห้องหนึ่งมี 2 คน อีกห้องหนึ่งมี 3 คน และอีกห้องหนึ่งมี 4 คน จะมีวิธีแบ่งคนเข้าห้องกี่วิธี

(4) ถ้าต้องการให้ห้องหนึ่งมี 2 คน อีกห้องหนึ่งมี 2 คน และอีกห้องหนึ่งมี 3 คน จะมีวิธีแบ่งคนเข้าห้องกี่วิธี

| | |
|---|---|
| **ข้อควรรู้** | การแบ่งกลุ่มสิ่งของในกรณีที่กลุ่มมีลักษณะเหมือนกัน จะต้อง__________________ |

**ตัวอย่าง** มีผลไม้ 9 ลูก แบ่งออกเป็นกอง 3 กอง

(1) ถ้าต้องการแบ่งผลไม้ออกเป็นกองละ 2 ลูก 3 ลูก และ 4 ลูก จะทำได้กี่วิธี

(2) ถ้าต้องการแบ่งผลไม้ออกเป็นกองละ 2 ลูก 2 ลูก และ 3 ลูก จะทำได้กี่วิธี

---

## 4.3 การแจกสิ่งของ

<u>การแจกสิ่งของที่เหมือนกันทั้งหมด</u>

| | |
|---|---|
| **ข้อควรรู้** | สำหรับของ n ชิ้นที่เหมือนกันทั้งหมด ถ้าต้องการแจกของนี้ให้คน 1 คน จะมีวิธีการแจกทั้งหมด n + 1 วิธี (คือ ไม่แจกเลย, แจก 1 ชิ้น, แจก 2 ชิ้น, … , แจก n ชิ้น) |

**ตัวอย่าง** มีปากกาที่เหมือนกัน 6 แท่ง จะมีวิธีแจกปากกานี้ให้คน 1 คนได้กี่วิธี เมื่อ

(1) แจกหรือไม่แจกเลยก็ได้

(2) แจกอย่างน้อย 1 แท่ง

(3) แจกอย่างน้อย 2 แท่ง แต่ไม่เกิน 5 แท่ง

**ข้อควรรู้** Stars and Bars

(1) สำหรับของ n ชิ้นที่เหมือนกันทั้งหมด ถ้าต้องการแจกของทั้งหมดให้คน r คน และทุกคนได้รับของอย่างน้อยคนละ 1 ชิ้น จะแจกได้ทั้งหมด $\binom{n-1}{r-1}$ วิธี

(2) สำหรับของ n ชิ้นที่เหมือนกันทั้งหมด ถ้าต้องการแจกของทั้งหมดให้คน r คน โดยแจกกี่ชิ้นก็ได้ (อาจมีคนไม่ได้รับของเลย) จะแจกได้ทั้งหมด $\binom{n+r-1}{r-1}$ วิธี

(3) สำหรับของ n ชิ้นที่เหมือนกันทั้งหมด ถ้าต้องการแจกของทั้งหมดให้คน r คน และทุกคนได้รับของอย่างน้อยคนละ 2 ชิ้น จะแจกได้ทั้งหมด $\binom{n-r-1}{r-1}$ วิธี

(4) สำหรับของ n ชิ้นที่เหมือนกันทั้งหมด ถ้าต้องการแจกของให้คน r คน โดยแจกกี่ชิ้นก็ได้ ให้คนละกี่ชิ้นก็ได้ (อาจมีคนไม่ได้รับและแจกไม่หมดก็ได้) จะแจกได้ทั้งหมด $\binom{n+r}{r}$ วิธี

(5) สำหรับของ n ชิ้นที่เหมือนกันทั้งหมด ถ้าต้องการแจกของให้คน r คน โดยแจกกี่ชิ้นก็ได้ ให้คนละกี่ชิ้นก็ได้ แต่ทุกคนต้องได้รับของอย่างน้อย 1 ชิ้น จะแจกได้ทั้งหมด $\binom{n}{r}$ วิธี

**ตัวอย่าง** มีเหรียญสิบบาท 10 เหรียญ ต้องการนำเหรียญแจกให้กับคน 3 คน จะมีวิธีการแจกกี่วิธี เมื่อ

(1) แจกเหรียญทั้งหมด โดยทุกคนได้รับอย่างน้อยคนละ 1 เหรียญ

(2) แจกเหรียญทั้งหมด โดยอาจจะมีคนที่ไม่ได้รับเหรียญเลยก็ได้

(3) แจกเหรียญทั้งหมด โดยทุกคนได้รับอย่างน้อยคนละ 2 เหรียญ

(4) แจกเหรียญทั้งหมด โดยทุกคนได้รับอย่างน้อยคนละ 3 เหรียญ

(5) แจกเหรียญหมดหรือไม่หมดก็ได้ และอาจจะมีคนที่ไม่ได้รับเหรียญเลยก็ได้

(6) แจกเหรียญหมดหรือไม่หมดก็ได้ แต่ทุกคนได้รับอย่างน้อยคนละ 1 เหรียญ

**ตัวอย่าง** จงหาจำนวนคู่อันดับ (x, y, z) ทั้งหมดที่เป็นคำตอบของสมการและอสมการต่อไปนี้

(1) $x + y + z = 10$ ; $x, y, z \in \mathbb{N}$

(2) $x + y + z = 10$ ; $x, y, z \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

(3) $x + y + z \leq 10$ ; $x, y, z \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

(4) $x + y + z \leq 10$ ; $x, y, z \in \mathbb{N}$

---

<u>การแจกสิ่งของที่เหมือนกันบางส่วนแตกต่างกันบางส่วน</u>

**ข้อควรรู้** สำหรับของ n ชิ้น ในสิ่งของเหล่านี้มีจำนวน $n_1$ ชิ้นที่เหมือนกันเป็นกลุ่มที่ 1 มี $n_2$ ชิ้นที่เหมือนกันเป็นกลุ่มที่ 2 เป็นเช่นนี้ไปเรื่อยๆจนถึงกลุ่มที่ k โดยที่ $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$ แล้ว จะมีวิธีในการแจกสิ่งของทั้งหมดให้คน 1 คน เท่ากับ $(n_1+1)\cdot(n_2+1)\cdot\ldots\cdot(n_k+1)$ วิธี

**ตัวอย่าง** นายอภิสิทธิ์ มีเหรียญอยู่ 4 ชนิด ได้แก่ เหรียญ 50 สตางค์ 3 เหรียญ เหรียญบาท 2 เหรียญ เหรียญ 5 บาท 1 เหรียญ และเหรียญ 10 บาท 3 เหรียญ เขาจะมีวิธีการหยิบเหรียญได้กี่วิธี เมื่อ

(1) หยิบอย่างไรก็ได้

(2) หยิบได้อย่างน้อย 1 เหรียญ

(3) หยิบได้เหรียญ 50 สตางค์อย่างน้อย 1 เหรียญ

(4) หยิบได้เหรียญครบทุกชนิด

(5) หยิบแล้วได้เงินอย่างน้อย 10 บาท

**ตัวอย่าง** จะมีวิธีในการเลือกตัวอักษร 4 ตัวจากคำว่า MISSISSIPPI ได้กี่วิธี

---

<u>การแจกสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด</u>

**ข้อควรรู้** สำหรับของ n ชิ้นที่แตกต่างกันทั้งหมด

- ถ้าต้องการแจกให้คนหนึ่งคน จะแจกได้ $2^n$ วิธี (ของแต่ละชิ้นจะเลือกได้ 2 วิธี คือ ให้หรือไม่ให้) แต่ถ้ากำหนดว่าจะต้องแจกอย่างน้อย 1 ชิ้น (หรือคนจะต้องได้รับอย่างน้อย 1 ชิ้น) จะแจกได้ $2^n - 1$ วิธี
- ถ้าต้องการแจกให้คน r คน จะแจกได้ $(r + 1)^n$ วิธี (ของแต่ละชิ้นจะเลือกได้ r + 1 วิธี) แต่ถ้ากำหนดว่าจะต้องแจกอย่างน้อย 1 ชิ้น จะแจกได้ $(r + 1)^n - 1$ วิธี

**ตัวอย่าง** มีของเล่นที่แตกต่างกัน 4 ชิ้น จะมีวิธีแจกของเล่นให้กับเด็กกี่วิธี เมื่อ

(1) แจกให้เด็ก 2 คน โดยแจกอย่างไรก็ได้

(2) แจกให้เด็ก 3 คน โดยแจกอย่างน้อย 1 ชิ้น

**ข้อควรรู้** สำหรับของ n ชิ้นที่แตกต่างกันทั้งหมด ถ้าต้องการแจกให้คน r คน โดยแจกหมด และได้รับคนละอย่างน้อย 1 ชิ้น จะแจกได้ $\sum_{i=0}^{r}(-1)^{i}\binom{r}{i}(r-i)^{n}$ วิธี

**ตัวอย่าง** มีของเล่นที่แตกต่างกัน 4 ชิ้น จะมีวิธีการแจกของเล่น<u>ทั้งหมด</u>ให้กับเด็กกี่วิธี เมื่อ

(1) แจกให้เด็ก 1 คน

(2) แจกให้เด็ก 2 คน

(3) แจกให้เด็ก 2 คน โดยแต่ละคนได้รับอย่างน้อยคนละ 1 ชิ้น

**ตัวอย่าง** จงหาจำนวนเต็มบวกทั้งหมดที่หาร 900 ลงตัว

**ตัวอย่าง** นก 9 ตัวบินไปเกาะที่ต้นไม้ต้นหนึ่งซึ่งมีกิ่ง 4 กิ่ง นกเหล่านี้จะมีวิธีเกาะกิ่งไม้กี่วิธี

**ตัวอย่าง** ต้องการทิ้งจดหมาย 7 ฉบับลงในตู้ไปรษณีย์ 3 ตู้ จะมีวิธีทิ้งจดหมายกี่วิธี

## 4.4 การสร้างฟังก์ชัน

**ข้อควรรู้** ถ้าให้เซต A มีสมาชิก m ตัว และเซต B มีสมาชิก n ตัว จะได้ว่า

- จำนวนฟังก์ชันจาก A ไป B ($f : A \longrightarrow B$) ที่เป็นไปได้ทั้งหมดเท่ากับ $n^m$ ฟังก์ชัน
- จำนวนฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไป B ($f : A \xrightarrow{1-1} B$) ที่เป็นไปได้ทั้งหมดเท่ากับ $P_{n,m}$ ฟังก์ชัน
- จำนวนฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B ($f : A \xrightarrow{\text{onto}} B$) ที่เป็นไปได้ทั้งหมดเท่ากับ $\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} (n-i)^m$

**ตัวอย่าง** กำหนดให้ A = {1, 2, 3} และ B = {a, b, c, d} แล้ว

(1) จงหาจำนวนฟังก์ชันจาก A ไป B

(2) จงหา จำนวนฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไป B

**ตัวอย่าง** กำหนดให้ A = {1, 2, 3} และ B = {a, b} แล้ว

(1) จงหาจำนวนฟังก์ชันจาก A ไป B

(2) จงหา จำนวนฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B

**ENT’41 ต.ค.** กำหนดให้เซต A = {1, 2, 3} และ B = {a, b, c, d} แล้วจำนวนสมาชิกของเซต $\{f : A \longrightarrow B \mid f$ ไม่เป็นฟังก์ชัน 1-1$\}$ เท่ากับเท่าใด

**ENT'44 ต.ค.** กำหนดให้ A = {1, 2, 3, 4} และ $S = \{ f : A \rightarrow A \mid f(x) \leq x + 1$ ทุก $x \in A \}$ แล้วจำนวนฟังก์ชันทั้งหมดที่เป็นสมาชิกของ S เท่ากับเท่าใด

---

## 4.5 สมบัติที่สำคัญบางประการของ $P_{n,r}$ และ $C_{n,r}$

1. $P_{n,0} = 1$ $\quad P_{n,n} = n!$
2. $C_{n,0} = 1$ $\quad C_{n,n} = 1$
3. $P_{n,r} = C_{n,r} \cdot r!$
4. $C_{n,r} = C_{n,n-r}$
5. $C_{n,r} + C_{n,r+1} = C_{n+1,r+1}$ (Pascal's identity)

---

**ตัวอย่าง** จงหาค่า n จากสมการต่อไปนี้ (กำหนดให้ $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$)

(1) $2 \cdot P_{n,2} + 50 = P_{2n,2}$

(2) $\binom{14}{3n+1} = \binom{14}{2n-2}$

**ตัวอย่าง** กำหนดให้ $P_{n,r} = 336$ และ $\binom{n}{r} = 56$ จงหาค่า n และ r ที่สอดคล้องกับระบบสมการ

**ตัวอย่าง** กำหนดให้ $\binom{n-1}{r-1} = 120$ และ $\binom{n}{r} = 165$ แล้ว จงหาค่าของ $\binom{n-1}{r}$

**NOTE (เกินหลักสูตร)** **หลักรังนกพิราบ** (The pigeonhole principle)

- ถ้ามีสิ่งของอย่างน้อย $k + 1$ ชิ้น ใส่ในกล่อง k กล่อง แล้วจะมีกล่องอย่างน้อย 1 กล่องที่มีของอย่างน้อย 2 ชิ้นในกล่อง
- ถ้ามีสิ่งของ n ชิ้น ใส่ลงในกล่อง k กล่อง แล้วจะได้ว่าต้องมีกล่องอย่างน้อย 1 กล่องที่มีวัตถุอย่างน้อย $\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil$ ชิ้น

**ตัวอย่าง** มีถุงเท้า 4 คู่ในตู้เสื้อผ้า โดยถุงเท้าแต่ละคู่แตกต่างกัน ถ้าต้องการหยิบถุงเท้าจากตู้เสื้อผ้าขึ้นมาแบบสุ่ม จะต้องหยิบถุงเท้าอย่างน้อยกี่ข้างจึงจะมั่นใจได้ว่าถุงเท้าที่หยิบมาจะต้องมีอย่างน้อย 2 ข้างที่เป็นถุงเท้าคู่เดียวกัน

**ตัวอย่าง** ในกล่อง 6 ใบ มีของใส่เอาไว้รวมทั้งหมด n ชิ้น ถ้าทราบว่าจะมีอย่างน้อย 1 กล่องที่มีของอย่างน้อย 4 ชิ้น จงหาค่า n ที่น้อยที่สุดที่เป็นไปได้

# 5. ทฤษฎีบททวินาม

ในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น เราได้เคยท่องสูตรในการกระจายกำลังสองสมบูรณ์และกำลังสามสมบูรณ์ไปแล้ว สำหรับทฤษฎีบททวินามจะเป็นทฤษฎีที่ช่วยให้เราสามารถกระจาย $(a + b)^n$ ได้ง่ายขึ้น

## 5.1 สามเหลี่ยมปาสคาล

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| n = 0 | | | | | | | 1 | | | | | | |
| n = 1 | | | | | | 1 | | 1 | | | | | |
| n = 2 | | | | | 1 | | 2 | | 1 | | | | |
| n = 3 | | | | 1 | | 3 | | 3 | | 1 | | | |
| n = 4 | | | 1 | | 4 | | 6 | | 4 | | 1 | | |
| n = 5 | | 1 | | 5 | | 10 | | 10 | | 5 | | 1 | |
| n = 6 | 1 | | 6 | | 15 | | 20 | | 15 | | 6 | | 1 |

สัมประสิทธิ์ทวินามของแต่ละพจน์ที่เกิดขึ้นจากการกระจาย $(a + b)^n$ จะมีค่าเป็นไปตามสามเหลี่ยมปาสคาล (Pascal's triangle) ดังรูปข้างต้น

---

**ตัวอย่าง** จงสามเหลี่ยมปาสคาลในการกระจาย

(1) $(x - y)^6$

(2) $(2x + y)^4$

## 5.2 ทฤษฎีบททวินาม

ในการกระจายทวินาม $(a + b)^n$ ถ้าให้ a และ b เป็นจำนวนจริง และ n เป็นจำนวนเต็มบวก แล้ว

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{r}a^{n-r}b^r + \dots + \binom{n}{n}a^0 b^n$$

$$= \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}a^{n-r}b^r$$

ซึ่งถ้าเราสังเกต จะเห็นว่าแต่ละพจน์ในการกระจายทวินามจะเป็นไปตามสูตร

$$\boxed{T_{r+1} = \binom{n}{r}a^{n-r}b^r}$$

เมื่อ $T_{r+1}$ คือ พจน์ที่ r + 1 ที่เกิดจากการกระจายทวินาม

**ข้อควรรู้** สัมประสิทธิ์ทวินาม คือ จำนวน $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{n}$ ที่เกิดขึ้นจากการกระจายทวินาม $(a + b)^n$

**ข้อควรรู้** **ข้อสรุปบางประการเกี่ยวกับการกระจายทวินาม $(a + b)^n$**

1. ในการกระจายทวินาม $(a + b)^n$ จะมีจำนวนพจน์ทั้งหมด n + 1 พจน์
2. ในการกระจายทวินาม $(a + b)^n$ สัมประสิทธิ์ทวินามของพจน์ที่ r + 1 กับพจน์ที่ n - r + 1 จะมีค่าเท่ากัน

**ตัวอย่าง** จงใช้ทฤษฎีบททวินามในการกระจาย $(2x - 3y)^4$

**ตัวอย่าง** จงหาพจน์ต่างๆต่อไปนี้

(1) พจน์ที่ 3 ของการกระจาย $(x + y)^9$

(2) พจน์ที่ 10 ของการกระจาย $(x^2 - 2y)^{13}$

(3) พจน์ที่ 7 จากการกระจาย $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^{11}$

**ตัวอย่าง** ในการกระจาย $(a - 3b^2)^{10}$ จงหา

(1) พจน์ที่มีตัวแปร $a^7$

(2) พจน์ที่มีตัวแปร $b^{12}$

**ตัวอย่าง** ในการกระจาย $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{x^2}\right)^{10}$ จงหา

(1) พจน์กลาง

(2) พจน์ที่มีตัวแปร $x^{-\frac{5}{2}}$

(3) พจน์ที่ไม่มีตัวแปร $x$

**ตัวอย่าง** ในการกระจาย $(3x - 2y)^5$ จงหา

(1) พจน์กลาง

(2) สัมประสิทธิ์ทวินามของพจน์ที่ 4

(3) สัมประสิทธิ์ของพจน์ที่มีตัวแปร $x^3$

(4) ผลรวมของสัมประสิทธิ์ทวินามทุกพจน์

(5) ผลรวมของสัมประสิทธิ์ทุกพจน์

**ENT'42 มี.ค.** ถ้า a และ b เป็นสัมประสิทธิ์ของ $x^{-2}$ และ $x^{4}$ ของการกระจาย $\left(x^{4}-\frac{1}{2x^{2}}\right)^{10}$ ตามลำดับ แล้ว $\frac{a}{b}$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

**ENT'36** ในการกระจาย $(xy - 2y^{-3})^{8}$ พจน์ที่มีผลบวกของกำลังของ x กับกำลังของ y เท่ากับ -4 มีสัมประสิทธิ์เท่ากับเท่าใด

**ENT'44 มี.ค.** กำหนดให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่งทำให้พจน์ที่ไม่มี x ในการกระจาย $\left(x^{2}+\frac{1}{2x}\right)^{n}$ คือพจน์ที่ 9 สัมประสิทธิ์ของ $x^{15}$ ในการกระจายนี้เท่ากับเท่าใด

**ENT'32** ในการกระจาย $(1 + x)^{43}$ ถ้าสัมประสิทธิ์ของพจน์ที่ $(2r + 1)$ เท่ากับสัมประสิทธิ์ของพจน์ที่ $(r + 2)$ แล้วสัมประสิทธิ์ของพจน์ที่ 3r มีค่าเท่าใด

**ENT'48 มี.ค.** พจน์ที่เป็นค่าคงตัวที่เกิดจากการกระจาย $(\tan x - 2\cot x)^{8}$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

ENT'38 รากที่ 5 รากหนึ่งของ $3^{20}-5\cdot3^{16}\cdot2^{3}+5\cdot3^{12}\cdot2^{7}-5\cdot3^{8}\cdot2^{10}+5\cdot3^{4}\cdot2^{12}-2^{15}$ คือค่าในข้อใดต่อไปนี้

1. 67 2. 69 3. 71 4. 73

ENT'31 สัมประสิทธิ์ของ $x^{r}$ ในการกระจาย $\left(x^{2}+\frac{1}{x}\right)^{2n}$ คือข้อใดต่อไปนี้

1. $\dfrac{(2n)!}{\left(\frac{2n+r}{3}\right)!\cdot\left(\frac{4n-r}{3}\right)!}$ 2. $\dfrac{(2n)!}{\left(\frac{4n-r}{3}\right)!}$

3. $\dfrac{(2n)!}{r!\cdot(2n-r)!}$ 4. $\dfrac{(2n)!}{(2r)!}$

ENT'30 ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. จากการกระจาย $\left(x^{3}+\frac{1}{2x}\right)^{8}$ สัมประสิทธิ์ของ $x^{12}$ คือ 56

2. จากการกระจาย $\left(x^{3}+\frac{1}{2x}\right)^{8}$ ไม่มีพจน์ใดเลยที่เป็นค่าคงที่

3. จากการกระจาย $(x + y)^{n} - (x - y)^{n}$ สัมประสิทธิ์ของ $x^{2}y^{n-2}$ คือ $2\cdot\binom{n}{2}$ เมื่อ n เป็นจำนวนคู่บวก

4. จากการกระจาย $(x + y)^{n} - (x - y)^{n}$ จนเป็นผลสำเร็จแล้วจะเหลือพจน์อยู่ $\frac{n}{2}$ พจน์ เมื่อ n เป็นจำนวนคู่บวก

**ENT'41** ในการกระจาย $(x + 2)^n$ ถ้าพจน์ที่ 2 และพจน์ที่ 3 เป็น 160 และ 320 ตามลำดับ แล้วความสัมพันธ์ระหว่าง x กับ n ในข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง

1. $x = n - 2$ 2. $2x = n - 1$ 3. $2x = n + 1$ 4. $3x = n - 2$

| |
|---|
| **NOTE** **การกระจายทวินามของ $(a + b + c)^n$**<br>1. ในการกระจายทวินาม $(a + b + c)^n$ จะพบว่าแต่ละพจน์มีค่าเป็น $\frac{n!}{p!\cdot q!\cdot r!}a^p b^q c^r$ โดย $p + q + r = n$<br>2. ในการกระจายทวินาม $(a + b + c)^n$ จะมีจำนวนพจน์ทั้งหมด $\binom{n+2}{2}$ พจน์ |

**ตัวอย่าง** ในการกระจาย $(x - 2y + z)^8$ จงหา

(1) จำนวนพจน์ทั้งหมดที่เกิดจากการกระจาย

(2) สัมประสิทธิ์ของพจน์ที่มีตัวแปร $x^3y^2z^3$

(3) สัมประสิทธิ์ของพจน์ที่มีตัวแปร $x^4y^2z^2$

**ตัวอย่าง** จงหาสัมประสิทธิ์ของพจน์ที่มีตัวแปร $x^3$ จากการกระจาย $(x^2 + 2x - 1)^4$

## 5.3 การประยุกต์ทฤษฎีบททวินามกับการนับ

พิจารณา จากการกระจายทวินาม $(a + b)^n$ ถ้าเราลองแทนค่า a และ b เป็น 1 จะได้ว่า

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{r} + \ldots + \binom{n}{n}$$

ซึ่งถ้าเราสังเกตจะพบว่า

- ผลรวมของสัมประสิทธิ์ทวินามทุกพจน์จากการกระจาย $(a + b)^n$ จะมีค่าเท่ากับ $2^n$ นั่นเอง

- ในทางคอมบินาทอริกซ์ $2^n$ ก็คือจำนวนวิธีในการแจกสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด n สิ่งให้กับคนหนึ่งคน ซึ่งจะมีค่าเท่ากับ $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{r} + \ldots + \binom{n}{n}$ (ไม่แจกเลย + เลือกของ 1 ชิ้นมาแจก + เลือกของ 2 ชิ้นมาแจก + ... + แจกหมดทุกชิ้น)

---

**ตัวอย่าง** พี่เก่งมีเพื่อนสนิทอยู่ทั้งหมด 8 คน ในงานวันเกิดของพี่เก่ง พี่เก่งต้องการเชิญเพื่อนสนิทมางานวันเกิด พี่เก่งจะมีวิธีการเชิญเพื่อนกี่วิธี เมื่อ

(1) เชิญเพื่อนอย่างน้อย 1 คน

(2) เชิญเพื่อนอย่างน้อย 2 คน

(3) เชิญเพื่อนอย่างน้อย 3 คน

**ตัวอย่าง** ในการหยิบลูกบอลขึ้นมาจากกล่องจำนวนหนึ่ง ซึ่งในกล่องมีลูกบอลที่ต่างกัน 11 ลูก เป็นสีแดง 4 ลูก สีเขียว 5 ลูก และสีเหลือง 2 ลูก จะมีวิธีการหยิบลูกบอลกี่วิธี เมื่อ

(1) ได้ลูกบอลอย่างน้อย 1 ลูก

(2) ได้ลูกบอลสีแดงอย่างน้อย 1 ลูก

(3) ได้ลูกบอลครบทุกสี

(4) ได้ลูกบอลสีแดงอย่างน้อย 1 ลูก <u>และ</u> สีเหลืองอย่างน้อย 1 ลูก

(5) ได้ลูกบอลสีแดงอย่างน้อย 1 ลูก <u>หรือ</u> สีเหลืองอย่างน้อย 1 ลูก

(6) ได้ลูกบอลสีแดง 2 ลูก และได้ลูกบอลสีเขียวอย่างน้อย 2 ลูก

**ตัวอย่าง** จุด 7 จุด เรียงอยู่บนวงกลมวงหนึ่ง จงหาจำนวนรูปเหลี่ยมทั้งหมดที่มีจุดเหล่านี้เป็นจุดยอด

NOTE

# 6. ความน่าจะเป็น

ในชีวิตประจำวันของเราล้วนแล้วแต่พบกับเหตุการณ์ที่ไม่แน่นอนต่างๆมากมาย ซึ่งเหตุการณ์ต่างๆ หลายๆเหตุการณ์สามารถอธิบายได้โดยใช้ทฤษฎีความน่าจะเป็น ซึ่งสามารถนำมาประยุกต์ใช้ในการตัดสินใจทำสิ่งต่างๆได้

## 6.1 ปริภูมิตัวอย่าง เหตุการณ์ และความน่าจะเป็นของเหตุการณ์

การทดลองสุ่ม คือ การทดลองซึ่งเราทราบว่าจะเกิดผลลัพธ์อะไรได้บ้าง แต่ไม่สามารถบอกได้อย่างชัดเจนว่าในการทดลองแต่ละครั้งจะเกิดผลลัพธ์อะไร

ปริภูมิตัวอย่าง ( Sample Space) คือ เซตของผลลัพธ์ทั้งหมดที่เป็นไปได้จากการทดลองสุ่ม ขึ้นกับสิ่งที่เราสนใจ

เหตุการณ์ ( Event) คือ สับเซตของปริภูมิตัวอย่าง

---

**ตัวอย่าง** จงหาแซมเปิลสเปซของการทดลองสุ่มต่อไปนี้

(1) โยนเหรียญ 1 เหรียญ 1 ครั้ง และทอดลูกเต๋า 1 ลูก 1 ครั้ง สนใจหน้าของเหรียญและแต้มของลูกเต๋าที่เกิดขึ้น

(2) ทอดลูกเต๋า 2 ลูก 1 ครั้ง สนใจผลรวมของแต้มของลูกเต๋าทั้งสองลูก

---

<u>บทนิยาม</u> ถ้า S แทนปริภูมิตัวอย่างของการทดลองสุ่มอย่างหนึ่ง ซึ่งแต่ละผลลัพธ์ในปริภูมิตัวอย่างมีโอกาสเกิดขึ้นเท่าๆกัน และ E แทนเหตุการณ์ที่เราสนใจ แล้วความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ E เขียนแทนด้วย P(E) จะหาได้จาก

$$\boxed{P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}}$$

เมื่อ n(E) แทนจำนวนสมาชิกในเหตุการณ์ E

n(S) แทนจำนวนสมาชิกในปริภูมิตัวอย่าง S

## 6.2 กฎที่สำคัญบางประการของความน่าจะเป็น

ให้ S เป็นปริภูมิตัวอย่าง และ A, B เป็นเหตุการณ์ใดๆใน S

1. $0 \leq P(A) \leq 1$
2. $P(S) = 1$ $P(\varnothing) = 0$
3. $P(A) = 1 - P(A')$
4. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 1 - P(A' \cap B')$

   $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

---

<u>ทั่วไป</u>

**ตัวอย่าง** โยนเหรียญบาทที่เที่ยงตรง 3 เหรียญพร้อมกัน 1 ครั้ง จงหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์

(1) เหรียญออกหัวอย่างน้อย 1 เหรียญ

(2) เหรียญออกหัวและก้อยอย่างน้อย 1 เหรียญ

(3) เหรียญออกหัวมากกว่าออกก้อย

**ตัวอย่าง** มีหนังสือเลขที่เหมือนกัน 3 เล่ม หนังสือเคมีที่เหมือนกัน 2 เล่ม และหนังสือฟิสิกส์ที่เหมือนกัน 3 เล่ม ถ้าต้องการจัดหนังสือทั้งหมดบนชั้นหนังสือ จงหาความน่าจะเป็นที่

(1) วิชาเดียวกันอยู่ติดกัน

(2) หนังสือเคมีไม่อยู่ติดกัน

(3) หนังสือเลขอยู่ริม 2 ข้าง

(4) หนังสือฟิสิกส์อยู่ติดกัน

**ข้อควรระวัง**

**ตัวอย่าง** คน 7 คน มีนาย ก, ข และ ค รวมอยู่ด้วย จงหาจำนวนวิธีจัดเรียงคนนั่งรอบโต๊ะกลม เมื่อ

(1) นาย ก, ข และ ค อยู่แยกกัน

(2) นาย ก อยู่ติดกับ ข แต่นาย ค ไม่ติดกับ ก และ ข

(3) นาย ข อยู่ติดกับ ก และ ค

(4) นาย ก, ข และ ค ห้ามอยู่ติดกัน 3 คน

**ตัวอย่าง** ต้องการหยิบไพ่ 2 ใบจากไพ่สำรับหนึ่งซึ่งมี 52 ใบ จะมีวิธีหยิบได้กี่วิธี เมื่อ

(1) หยิบได้คู่สอง

(2) หยิบได้ไพ่ต่างชนิดกัน

(3) หยิบได้ไพ่โพแดง 2 ใบ

(4) หยิบได้ไพ่ชนิดเดียวกันทั้ง 2 ใบ

<u>ความน่าจะเป็นแบบถ่วงน้ำหนัก</u>

**ตัวอย่าง** ลูกเต๋าลูกหนึ่งถูกถ่วงน้ำหนักให้แต้ม 2 และ 5 มีโอกาสเกิดขึ้นเป็น 2 เท่าของหน้าอื่นๆ จงหาความน่าจะเป็นที่โยนลูกเต๋า 1 ครั้งแล้วได้แต้มคี่หรือแต้ม 4

**ตัวอย่าง** ในการเล่นเป่ายิ้งฉุบครั้งหนึ่งระหว่างนาย ก กับนาย ข ถ้านาย ก และนาย ข ต่างก็มีโอกาสที่จะออกกรรไกร ค้อน และกระดาษ เป็น 0.5, 0.3 และ 0.2 ตามลำดับแล้ว จงหาความน่าจะเป็นที่ นาย ก จะเป่ายิ้งฉุบไม่แพ้

ความน่าจะเป็นกับแผนภาพเวนน์

**ตัวอย่าง** กำหนดให้ A และ B เป็นเหตุการณ์ใดๆ จงหา $P(A' \cap B)$ เมื่อกำหนดให้

(1) $P(A) = 0.3$ $P(B) = 0.5$ และ $P(A' \cap B') = 0.3$

(2) $P(A \cup B) = 0.6$ $P(A \cap B) = 0.15$ และ $P(A \cup B') = 0.75$

ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่เป็นอิสระต่อกัน

**ข้อควรรู้** ถ้าเหตุการณ์ B เป็นอิสระจากเหตุการณ์ A คือ การเกิดขึ้นของเหตุการณ์ A ไม่มีผลต่อการเกิดขึ้นของเหตุการณ์ B แล้วจะได้ว่า $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

**ตัวอย่าง** กล่องใบหนึ่งมีลูกบอลสีเขียว 5 ลูก สีขาว 3 ลูก ในการหยิบลูกบอล 2 ลูกขึ้นมาจากกล่องโดยหยิบทีละลูกแล้วใส่คืน จงหาความน่าจะเป็นที่

(1) หยิบครั้งแรกได้ลูกบอลสีขาว

(2) หยิบครั้งที่สองได้ลูกบอลสีขาว

**ตัวอย่าง** ทอดลูกเต๋า 2 ลูก 2 ครั้ง ความน่าจะเป็นที่จะได้แต้มรวมเป็น 4 ในครั้งแรกและได้แต้มรวมเป็น 10 ในครั้งที่สอง เท่ากับเท่าใด

**ตัวอย่าง** ในการเล่นเกมวัดดวงครั้งหนึ่ง นายแห้วมีความน่าจะเป็นที่จะชนะเกมเท่ากับ 0.2 แล้ว ถ้านายแห้วเล่นเกมนี้ 3 ครั้ง จงหาความน่าจะเป็นที่นายแห้วจะชนะอย่างน้อย 1 ครั้ง

ความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข

**ตัวอย่าง** ครอบครัวหนึ่งมีลูก 3 คน ถ้าลูกคนแรกของครอบครัวนี้เป็นผู้หญิงแล้ว จงหาความน่าจะเป็นที่ครอบครัวนี้จะมีลูกสาว 2 คน

**ตัวอย่าง** กล่องใบหนึ่งมีผลไม้ทั้งหมด 9 ลูก เป็นทุเรียน 5 ลูก ซึ่งเน่าเสียไปแล้ว 2 ลูก และเป็นมะม่วง 4 ลูก ซึ่งเน่าเสียไปแล้ว 2 ลูก ถ้าต้องการหยิบผลไม้ขึ้นมาจากกล่อง 2 ลูก โดยหยิบทีละลูกแบบไม่ใส่คืน ความน่าจะเป็นที่จะได้ผลไม้ชนิดเดียวกันทั้ง 2 ลูกและยังไม่เน่าเสีย มีค่าเท่ากับเท่าใด

**ตัวอย่าง** ในการโยนเหรียญ 1 เหรียญจนกระทั่งขึ้นหัว หรือจนกระทั่งโยนได้ 3 ครั้ง จงหาความน่าจะเป็นที่จะต้องโยนเหรียญ 3 ครั้ง

อื่นๆ

**ตัวอย่าง** กำหนดสี่เหลี่ยมจัตุรัสรูปหนึ่งยาวด้านละ 5 หน่วย ถ้าต้องการเลือกจุดจุดหนึ่งในรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสนี้อย่างสุ่มแล้ว จงหาความน่าจะเป็นที่จุดนี้อยู่ห่างจากมุมของรูปสี่เหลี่ยมมากกว่า 2 หน่วย

**ตัวอย่าง** นางสาวจุ๋มนัดแฟนออกมาเที่ยวที่สยามพารากอน เวลา 15.00 น. ถ้านางสาวจุ๋มตกลงกับแฟนไว้ว่าห้ามมาสายเกิน 15 นาที และนางสาวจุ๋มมาถึงสยามพารากอนเวลา 15.00 น. พอดี จงหาความน่าจะเป็นที่นางสาวจุ๋มจะรอแฟนไม่เกิน 5 นาที

**ตัวอย่าง** ถุงใบหนึ่งมีลูกบอล 3 สี โดยมีลูกบอลสีชมพู 5 ลูก ที่เหลือเป็นลูกบอลสีส้มและสีชมพู ในการสุ่มหยิบลูกบอลขึ้นมา 1 ลูก พบว่าโอกาสทีจะหยิบได้ลูกบอลสีส้มมีค่าเป็น $\frac{1}{5}$ และโอกาสที่จะหยิบลูกบอลสีเขียวหรือสีส้มมีค่าเป็น $\frac{1}{2}$ จงหาว่าถุงใบนี้มีลูกบอลกี่ลูก

**ตัวอย่าง** กล่องใบหนึ่งมีลูกแก้วขนาดเดียวกัน 3 สี เป็นสีเขียว 4 ลูก ที่เหลือเป็นสีขาวและสีดำ โดยมีลูกแก้วสีขาวมากกว่าลูกแก้วสีดำอยู่ 2 ลูก เมื่อสุ่มหยิบลูกแก้วขึ้นมา 2 ลูกพร้อมกัน พบว่าความน่าจะเป็นที่จะได้ลูกแก้วสีเขียวทั้ง 2 ลูกมีค่าเท่ากับ $\frac{1}{11}$ จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้ลูกแก้วสีขาว 1 ลูกและสีเขียว 1 ลูก

รวมข้อสอบแข่งขัน

**ENT'26** รถยนต์คันหนึ่งมีที่นั่งข้างหน้า 2 ที่ และข้างหลัง 1 ที่ ถ้ามีคนทั้งหมด 6 คน ซึ่ง 2 คนขับรถได้ จะจัดให้คนเข้านั่งรถได้กี่วิธี

**ENT'44 ต.ค.** คนกลุ่มหนึ่งเป็นชายและหญิงจำนวนเท่ากัน โดยที่อัตราส่วนของจำนวนวิธีที่ชายและหญิงยืนสลับที่กันเป็นแถวตรง กับจำนวนวิธีที่ชายและหญิงยืนสลับที่กันเป็นวงกลมเท่ากับ 10 : 1 จำนวนวิธีที่จะเลือกตัวแทน 2 คน จากคนกลุ่มนี้ โดยมีชายอย่างน้อย 1 คน เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

**ทุนเล่าเรียนหลวง'42** สามี-ภรรยา 6 คู่ นัดกันมารับประทานอาหารค่ำ โดยจัดโต๊ะนั่งไว้ 3 โต๊ะ โต๊ะละ 4 ที่นั่ง ในการกำหนดที่นั่งของแต่ละคนได้มีการทำฉลากจำนวน 12 ใบ โดยมีฉลาก 4 ใบ เขียนว่า "โต๊ะหมายเลข 1" ฉลาก 4 ใบเขียนว่า "โต๊ะหมายเลข 2" และฉลากอีก 4 ใบ เขียนว่า "โต๊ะหมายเลข 3" ให้แต่ละคนหยิบฉลากคนละ 1 ใบ โดยการสุ่ม จงหาความน่าจะเป็นที่

(ก) โต๊ะหมายเลข 1 จะมีหญิงนั่งทั้ง 4 คน

(ข) โต๊ะหมายเลข 1 จะมีคู่สามี-ภรรยา 2 คู่นั่ง

(ค) โต๊ะหมายเลข 1 จะมีผู้ชาย 3 คน และผู้หญิง 1 คนนั่ง

**ENT’40** ครู 3 คน พานักเรียน 6 คน ไปเข้าค่ายวิชาการซึ่งต้องพักในบ้านหลังหนึ่งที่มีห้องนอน 3 ห้อง ห้องเล็กอยู่ได้ 2 คน ห้องกลางอยู่ได้ 3 คน และห้องใหญ่อยู่ได้ 4 คน ถ้าต้องการให้ครู 3 คน พักในห้องเดียวกัน จะมีวิธีการแบ่งคนเข้าพักได้ทั้งหมดกี่วิธี

**PAT1 ต.ค.52** มีสิ่งของซึ่งแตกต่างกันอยู่ 8 ชิ้น ต้องแบ่งให้คน 2 คน คนหนึ่งได้ 6 ชิ้น และอีกคนหนึ่งได้ 2 ชิ้น จะมีจำนวนวิธีการแบ่งกี่วิธี

**โควตา มช’48** นักเรียนห้องหนึ่งมีจำนวน 10 คน ครูประจำชั้นต้องการเลือกนักเรียนจำนวน 3 คน ให้มาช่วยทำงาน 2 อย่างคือ ลบกระดาน 1 คน และทำความสะอาดห้องเรียน 2 คน ครูประจำชั้นจะเลือกนักเรียนให้ทำงานดังกล่าวได้ทั้งหมดกี่วิธีที่แตกต่างกัน

**ENT’23** เรือนรับรองหลังหนึ่งมี 3 ห้องนอน ห้องหนึ่งอยู่ได้ 3 คน ส่วนอีก 2 ห้องอยู่ได้ห้องละ 2 คน ถ้ามีแขก 7 คน เป็นหญิง 3 คน ชาย 4 คน จะเดินทางมาพักโดยไม่แจ้งเพศให้ทราบล่วงหน้า ความน่าจะเป็นที่เจ้าภาพจะจัดให้หญิง 3 คน ได้พักอยู่ห้องเดียวกันเท่ากับเท่าใด

**ENT’35** บริษัทแห่งหนึ่งเปิดรับพนักงานใหม่เข้าทำงานใน 4 แผนก แผนกละ 4 คน โดยให้แต่ละแผนกมีพนักงานใหม่เป็นชาย 2 คน หญิง 2 คน มีผู้สมัครเป็นชาย 10 คน หญิง 9 คน จะมีจำนวนวิธีคัดเลือกพนักงานเข้าทำงานในแผนกต่างๆทั้งหมดเท่ากับเท่าใด

**ENT’48 มี.ค.** ในคณะกรรมการนักเรียนจำนวน 10 คน จะมีวิธีเลือกประธาน รองประธานและเลขานุการได้กี่วิธี ถ้ากรรมการคนหนึ่งไม่สมัครที่จะเป็นประธาน

**ENT'35** กล่องใบหนึ่งมีลูกแก้วขนาดเดียวกัน 13 ลูก เป็นสีแดง 6 ลูก สีขาว 4 ลูก นอกนั้นเป็นสีเหลือง สุ่มหยิบลูกแก้วมา 2 ลูก ความน่าจะเป็นที่จะได้ลูกแก้วต่างสีกันเท่ากับเท่าใด

**PAT1 ก.ค.52** ในลิ้นชักมีถุงเท้าสีขาว 4 คู่ สีดำ 3 คู่ และสีน้ำเงิน 2 คู่ แต่ไม่ได้จัดเรียงไว้เป็นคู่ๆ ถ้าสุ่มหยิบถุงเท้ามา 2 ข้าง ความน่าจะเป็นที่จะได้ถุงเท้าสีเดียวกันเท่ากับเท่าใด

**ENT'31** มีหลอดไฟลักษณะเหมือนกัน 6 หลอด เป็นหลอดไฟสีแดง 3 หลอด สีเขียว 2 หลอด และสีเหลือง 1 หลอด นำหลอดไฟทั้งหมดมาจัดเรียงประดับเป็นวงกลม ความน่าจะเป็นที่จะได้หลอดไฟสีเดียวกันอยู่เรียงติดต่อกันเท่ากับเท่าใด

**ENT'46 มี.ค.** นายกวีและนายขจร ได้รับเชิญไปงานเลี้ยงซึ่งมีผู้ได้รับเชิญทั้งหมด 20 คน เจ้าภาพจัด (โดยสุ่ม) ให้ผู้ร่วมงานนั่งโต๊ะกลม 2 โต๊ะ โต๊ะละ 10 ที่นั่ง ความน่าจะเป็นที่นายกวีและนายขจรได้นั่งติดกันในโต๊ะตัวเดียวกันเท่ากับเท่าใด

**ENT'44 ต.ค.** ห้างสรรพสินค้าแห่งหนึ่งจัดรายการสมนาคุณแก่ลูกค้า โดยจะให้ลูกค้าทุกคนสุ่มหยิบคูปองส่วนลดได้ 2 ใบ จากกล่องซึ่งมีคูปองทั้งหมด 12 ใบ ซึ่งมีคูปองมูลค่า 50 บาท 5 ใบ คูปองมูลค่า 100 บาท 3 ใบ คูปองมูลค่า 200 บาท 3 ใบ และคูปองมูลค่า 500 บาท 1 ใบ ความน่าจะเป็นที่ลูกค้าคนหนึ่งจะสุ่มหยิบคูปอง 2 ใบ และได้คูปองที่มีมูลค่าส่วนลดรวมมากกว่า 300 บาท มีค่าเท่ากับเท่าใด

**ENT'31** จำนวนวิธีเลือกตัวอักษร 4 ตัว จากตัวอักษรของคำว่า BERBARREL เท่ากับเท่าใด

**ENT'42 มี.ค.** ถุงใบหนึ่งมีลูกแก้วขนาดเดียวกันอยู่ 10 ลูก เป็นสีแดง 3 ลูก สีขาว 5 ลูก สีดำ 2 ลูก สุ่มหยิบลูกแก้วจากถุงสองครั้ง ครั้งละลูก โดยไม่ใส่คืน ความน่าจะเป็นที่จะหยิบได้ลูกที่สองเป็นสีแดงเท่ากับเท่าใด

**โควตา มช'49** กล่องใบหนึ่งบรรจุลูกบอลสีแดง 1 ลูก สีดำ 2 ลูก และสีขาว 3 ลูก สุ่มหยิบลูกบอลในกล่องจำนวน 2 ลูก โดยหยิบทีละลูกและไม่ใส่ลูกบอลกลับคืนลงไปในกล่องก่อนหยิบครั้งต่อไป ความน่าจะเป็นที่จะหยิบได้ลูกบอลสีขาวไม่เกิน 1 ลูก เท่ากับเท่าใด

**โควตา มช'51** กล่องใบหนึ่งมีหลอดไฟดี 6 หลอด และหลอดไฟเสีย 4 หลอดคละกันอยู่ หากทำการสุ่มหลอดไฟทีละหลอดแบบไม่ใส่คืนสามครั้งแล้ว วิธีที่จะได้หลอดไฟดี 2 หลอด และหลอดไฟเสีย 1 หลอดมีกี่วิธี

**ENT'34** กำหนดให้เซต A มีสมาชิก 4 ตัว และเซต B มีสมาชิก 5 ตัว ถ้าสร้างฟังก์ชันจาก A ไป B แล้ว ความน่าจะเป็นที่จะได้ฟังก์ชัน 1-1 มีค่าเท่ากับเท่าใด

**PAT1 มี.ค.52** กำหนดให้ A = {1, 2, 3, 4} และ B = {a, b, c} แล้ว

เซต $S = \{f \mid f : A \longrightarrow B$ เป็นฟังก์ชันทั่วถึง$\}$ มีจำนวนสมาชิกเท่าใด

**ENT'46 มี.ค.** กำหนดให้ A = {1, 2} , B = {1, 2, 3, ... , 10} แล้ว

เซต $\{f \mid f : A \xrightarrow{1-1} B$ และมี $x \in A$ ซึ่ง $f(x) = x\}$ มีจำนวนสมาชิกเท่ากับเท่าใด

**ENT'40** ผลการสอบวิชาคณิตศาสตร์และวิชาเคมีของนักเรียนกลุ่มหนึ่งปรากฏว่า $\frac{1}{3}$ ของนักเรียนทั้งหมดสอบผ่านคณิตศาสตร์ และ $\frac{8}{15}$ ของนักเรียนทั้งหมดสอบผ่านเคมี ถ้าความน่าจะเป็นของนักเรียนคนหนึ่งในกลุ่มนี้ที่จะสอบผ่านอย่างมากหนึ่งวิชาเป็น $\frac{4}{5}$ แล้ว ความน่าจะเป็นที่เขาจะสอบผ่านอย่างน้อยหนึ่งวิชาเท่ากับเท่าใด

**ENT'46 ต.ค.** กล่องใบหนึ่งมีลูกแก้วขนาดเดียวกัน 3 สี เป็นสีขาว 4 ลูก สีแดงและสีเขียวมีจำนวนเท่ากัน เมื่อสุ่มหยิบลูกแก้วมา 2 ลูก ความน่าจะเป็นที่จะได้ลูกแก้วสีขาวทั้ง 2 ลูก เท่ากับ $\frac{2}{15}$ ถ้าสุ่มหยิบลูกแก้วมา 4 ลูก ความน่าจะเป็นที่จะได้ลูกแก้วเป็นสีเขียว 1 ลูก และสีแดงอย่างน้อย 1 ลูก เท่ากับเท่าใด

**PAT1 ก.ค.52** กำหนดให้ $A = \{(0, n) \mid n = 1, 2, \dots , 10\}$ และ $B = \{(1, n) \mid n = 1, 2, \dots , 10\}$ ในการเลือกจุดสองจุดที่แตกต่างกันจากเซต A และอีกหนึ่งจุดจากเซต B เพื่อเป็นจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมบนระนาบ ความน่าจะเป็นจะได้รูปสามเหลี่ยมที่มีพื้นที่ 1 ตารางหน่วย เท่ากับเท่าใด

**โควตา มช'50** มีเหรียญบาทจำนวน 3 เหรียญ โดยเหรียญบาทเหรียญที่ 1 เหรียญที่ 2 และเหรียญที่ 3 มีความน่าจะเป็นที่จะขึ้นด้านหัวเป็น $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ และ $\frac{1}{4}$ ตามลำดับ ถ้าโยนเหรียญบาท 3 เหรียญหนึ่งครั้งพร้อมกัน

และกำหนดให้ A แทนเหตุการณ์ที่เหรียญทั้งสามขึ้นด้านหัวเหมือนกัน
B แทนเหตุการณ์ที่เหรียญทั้งสามขึ้นด้านก้อยเหมือนกัน
C แทนเหตุการณ์ที่เหรียญที่ 1 ขึ้นด้านก้อย เหรียญที่ 2 และ 3 ขึ้นด้านหัว

ข้อใดถูก

1. P(A) มากกว่า P(C) 2. P(B) น้อยกว่า P(C) 3. P(A) มากกว่า P(B) 4. P(A) น้อยกว่า P(B)

**โควตา มข'50** สุทามีจดหมาย 4 ฉบับและซองจดหมาย 4 ซอง ที่เขียนที่อยู่ถึงเพื่อน 4 คน ถ้าสุทาหลับตาสุ่มหยิบจดหมายใส่ซองฉบับละซอง ข้อใดต่อไปนี้เป็นความน่าจะเป็นที่สุทาจะใส่จดหมายผิดซองทุกฉบับ

# เอกสารอ้างอิง


สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ. ***หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม 2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5,*** กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์ครุสภาลาดพร้าว, พิมพ์ครั้งที่ 5, 2550.

อรรณพ สุขธำรง. ***คณิตศาสตร์ Entrance เล่ม 5***. ม.ป.ป.

***Entrance Problem Book II for successful students***, กรุงเทพมหานคร : Tutor Publisher, 2549.

สมัย เหล่าวานิชย์, รศ. ***คณิตศาสตร์พื้นฐาน+เพิ่มเติม 4***, กรุงเทพมหานคร : บริษัท ไฮเอ็ดพับลิชชิ่ง จำกัด, ม.ป.ป.

ณัฐพล ศุจิจันทรรัตน์. ***New Math Tests book II***, Science Center, ม.ป.ป.

ธีระ ตีรณานุสิษฐ์. ***เฉลยข้อสอบคณิตศาสตร์ทุนเล่าเรียนหลวงปี 37-48***, Science Center, ม.ป.ป.

รุสลัน มาหามะปาริส. ***เฉลยข้อสอบโควตารับตรงเข้า 3 มหา'ลัย วิชาคณิตศาสตร์ พ.ศ. 2551-ปัจจุบัน,*** กรุงเทพมหานคร : Science Center, ม.ป.ป.